Risikozerlegung und Risikoattribution

Stephen Wehner

Senior Consultant

barra®

Agenda

1. Risikomaße und deren Eigenschaften
2. Risikomodell von Markowitz
3. Risikoattribution
4. Zuordnungsproblem von Covarianzrisiko
5. Mehrfaktoren Risikomodelle
6. Risikozerlegung im fundamentalen Mehrfaktorenmodell
7. Trennung von Risikoattribution und Risikozerlegung im Mehrfaktorenmodell
8. Risikoattribution nach Asset Allocation und Asset Selection

Risikomaße und deren Eigenschaften (I)

- Standardabweichung der Rendite

$$\sigma(R_i) = \sqrt{E\left(R_i - E\left(R_i\right)\right)^2}$$

- etabliertes Risikomaß
  - einfach zu interpretieren
  - in Renditeeinheiten
  - einfach zu schätzen
- Erwartungstreuer Schätzer:

$$Std\left(R_i\right) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \overline{R}\right)^2}$$

Risikomaße und deren Eigenschaften (II)

- Varianz der Rendite

$$\sigma^2(R_i) = (\sigma(R_i))^2 = E\left[(R_i - E(R_i))^2\right]$$

  – Quadrat der Standardabweichung

  – Erwartungstreuer Schätzer

$$Var(R_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2$$

Risikomaße und deren Eigenschaften (III)

$$\sigma^2\left(x_1R_1 + x_2R_2 + Const\right)$$
$$= x_1^2\sigma^2\left(R_1\right) + x_2^2\sigma^2\left(R_2\right) + 2x_1x_2Cov\left(R_{1,}R_2\right)$$
$$= x_1^2\sigma^2\left(R_1\right) + x_2^2\sigma^2\left(R_2\right) + 2x_1x_2\underbrace{\rho_{x_1,x_2}}_{\text{Korrelation}}\sigma\left(R_1\right)\sigma\left(R_2\right)$$

- d.h. falls $R_{1,}R_2$ unkorreliert, gilt:

$$\sigma^2\left(R_1 + R_2\right) = \sigma^2\left(R_1\right) + \sigma^2\left(R_2\right)$$

Varianz ist im Gegensatz zur Standardabweichung additiv

Risikomaße und deren Eigenschaften (IV)

- Beispiel: Aktive Rendite – Tracking Error

$$R_A = R_{Port} - R_{Bench}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(R_A) &= \sigma^2(R_{Port} - R_{Bench}) \\ &= \underbrace{\sigma^2(R_{Port}) + \sigma^2(R_{Bench}) - 2Cov(R_{Port}, R_{Bench})}_{\text{Risikozerlegung}}\end{aligned}$$

Risikomaße und deren Eigenschaften (V)

- Fazit
  - Risikozerlegungen lassen sich immer nur über den Varianzoperator bestimmen und nicht direkt über die Standardabweichung
  - Sofern die Zerlegungsvariablen nicht unkorreliert sind, entstehen immer gemischte Covarianz Terme, die sich nicht mehr eindeutig den Zerlegungsvariablen zuordnen lassen

Risikomaße und deren Eigenschaften (VI)

- Beispiel: $\sigma\left(R_1\right)=3\%,\sigma\left(R_2\right)=4\%,\rho_{R_1,R_2}=0$

$$\sigma^2\left(R\right)=\sigma^2\left(R_1+R_2\right)=\sigma^2\left(R_1\right)+\sigma^2\left(R_2\right)$$

$$=\left(0,03\right)^2+\left(0,04\right)^2$$

$$=0,0009+0,0016=0,0025$$

$$\sigma\left(R\right)=\sqrt{0,0025}=\underline{\underline{5\%}}$$

d.h. für prozentuale Attribution gilt:
R_1 trägt mit 9/25, R_2 mit 16/25 zum Gesamtrisiko von R bei

Risikomodell von Markowitz (I)

$$R_{Port} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

Gewicht von Asset i

Rendite von Asset i

$$\sigma^2\left(R_{Port}\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma^2\left(R_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} w_i w_j Cov\left(R_i, R_j\right)$$

$$= \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma^2\left(R_1\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Cov\left(R_1, R_n\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ Cov\left(R_n, R_1\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma^2\left(R_n\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Risikomodell von Markowitz (II)

- Nachteile:
  - quadratischer Schätzaufwand:

    $\frac{n^2+n}{2}$ Varianzen und Covarianzen müssen geschätzt werden
  - zur Schätzung müssen mindestens ebensolange Zeitreihen zur Verfügung stehen
  - Neuemmissionen (keine Historie) können nicht in die Risikoberechnung integriert werden
  - das Risikomodell bietet keine „natürliche“ Risikozerlegung, d.h. Risikoquellen werden nicht transparent

Risikoattribution (I)

Markowitz Modell:

Assets werden zunächst in verschiedene Klassen (z.B. Assetklassen, Sektoren, Style-Segmente, Durationklassen, etc.) eingeteilt

Gewicht von Klasse k

$$R_{Port} = \sum_{k=1}^{m} w_k R_k$$

Rendite von Klasse k

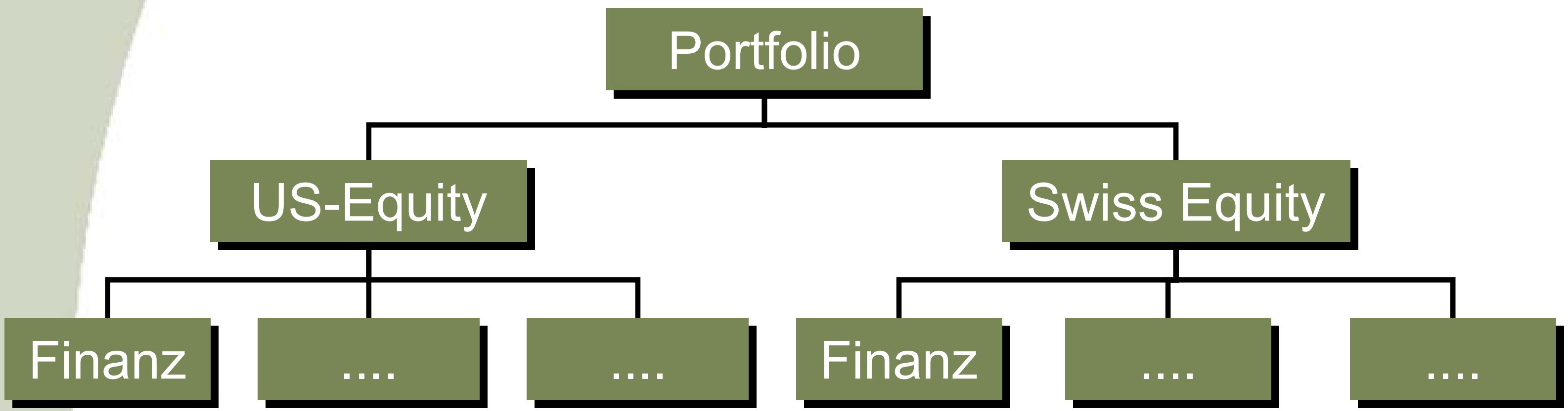
Risikoattribution (II)

$$\sigma^2\left(R_{Port}\right)=\sum_{k=1}^{m}w_k^2\sigma^2\left(R_k\right)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{k'=1\\k'\neq k}}^{n}w_k w_{k'}Cov\left(R_k,R_{k'}\right)$$

- Problem:
  - Sofern Renditen der ex ante festgelegten Klassen nicht unkorreliert sind treten hohe positive oder negative Covarianzen auf, d.h. nur ein Teil des Risikos läßt sich so eindeutig zuordnen

Risikoattribution (III)

- Nachteil:
  – kein „slice and dice“ möglich, d.h. Zerlegung nur nach vordefinierter Atrribution möglich



Keine Risikozerlegung nach Sektoren möglich!
Attribution muß erst neu definiert werden.

Zuordnungsproblem von Covarianzrisiko

- Zwei Ansätze werden in der Literatur vorgeschlagen:

1. Gleichverteilung des Covarianzrisikos

$$\sigma^2(R_1+R_2)=\underbrace{\sigma^2(R_1)+Cov(R_1,R_2)}_{\text{Risikobeitrag von } R_1}+\underbrace{\sigma^2(R_2)+Cov(R_1,R_2)}_{\text{Risikobeitrag von } R_2}$$

2. Verteilung nach prozentualen Varianzbeiträgen

$$\sigma^2(R_1+R_2)=\underbrace{\sigma^2(R_1)+\alpha\left(2Cov(R_1,R_2)\right)}_{\text{Risikobeitrag von } R_1}+\underbrace{\sigma^2(R_2)+(1-\alpha)\left(2Cov(R_1,R_2)\right)}_{\text{Risikobeitrag von } R_2}$$

mit $\alpha=\dfrac{\sigma^2(R_1)}{\sigma^2(R_1+R_2)}$

Mehrfaktoren Risikomodelle (I)

$$R_i = \sum_{l=1}^{r} \beta_l \cdot F_l + \varepsilon_i$$

mit F_l, ε_i unkorreliert
Faktorrendite
Faktorsensitivität

$$\sigma^2(R_i) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix}^T \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2(F_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Cov(F_1, F_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ Cov(F_r, F_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma^2(F_r) \end{bmatrix}}_{\text{Faktorkovarianzmatrix (FCM)}} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} + \sigma^2(\varepsilon_i)$$

Mehrfaktoren Risikomodelle (II)

Portfoliorendite $$R_{Port} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i$$

$$\Rightarrow \sigma^2\left(R_{Port}\right) = \begin{pmatrix} \beta_1^{Port} \\ \vdots \\ \beta_r^{Port} \end{pmatrix}^T \cdot FCM \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^{Port} \\ \vdots \\ \beta_r^{Port} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2\left(\varepsilon_i\right)$$

mit $$\beta_l^{Port} = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_l^i$$

Mehrfaktoren Risikomodelle (III)

- Vorteile:
  - Schätzaufwand linear: es müssen nur noch n β-Werte und die Faktorkovarianzmatrix geschätzt werden
  - Natürliche Risikozerlegung entlang der Risikofaktoren
  - Niedrige Covarianzterme, falls Faktoren unkorreliert; →Anforderung an Faktorauswahl

Barra®

Mehrfaktorenmodelle (I)

- Statistische Faktormodelle (Faktorbestimmung mittels Hauptkomponentenanalyse)
- Makroökonomische Faktormodelle
- Fundamentale Faktormodelle

strukturelle Faktormodelle

Mehrfaktorenmodelle (II)

Faktoreigenschaften

Modelltypen

	orthogonal	Interpretation	hoher Erklärungs-gehalt	stabil im Zeitablauf
Statistisch	X		X	
Makro.		X		
Fundamental	nahezu bei entspr. Research	X	X	X

Risikozerlegung im fundamentalen Mehrfaktorenmodell

Risk Decomposition (Barra Aegis)

A	B	C
RISK DECOMPOSITION		
	Risk (% Std Dev)	**Contribution (% Active Risk)**
Market Timing	0.00	0.00
Risk Indices	9.73	6.75
Industries	28.99	59.88
Country	7.03	3.52
Currency	0.00	0.00
Covariance * 2	N/A	27.26
Asset Selection	6.03	2.59
Active	37.47	
Benchmark	0.00	
Total	37.47	

Risikozerlegung im fundamentalen Mehrfaktorenmodell

Risk Decomposition (BarraOne)

Risk Source	Portfolio Risk	Active Risk	% Portfolio Risk	% Active Risk
Local Market Risk	37.77	37.77	100.38%	100.38%
Common Factor Risk	37.29	37.29	97.82%	97.82%
Style	9.96	9.96	6.97%	6.97%
Industry	28.09	28.09	55.53%	55.53%
Factor Interaction	N/A	N/A	35.31%	35.31%
Selection Risk	6.03	6.03	2.56%	2.56%
Currency Risk	9.75	9.75	6.68%	6.68%
Currency/Market Interaction	N/A	N/A	-7.06%	-7.06%
Total Risk	**37.70**	**37.70**	**100.00%**	**100.00%**

Risikozerlegung im fundamentalen Mehrfaktorenmodell

- Nachteil:
  – Risikozerlegung entlang der Risikofaktoren, nicht aber nach Attributionsschema des Investmentprozesses!!
- Beispiel:

Barra Sektoren Global Equity Modell $\neq$ **MSCI Sektoren Klassifikation**

Risikoattribution mit Mehrfaktorenmodellen

Groups by Scheme (BarraOne)

Grouping: GICS Industry	Asset ID	Asset Name	Holdings	GICS Industry	%CR
by: distinct	**30**		**15,102,116.00**		**100.00%**
Air Freight and Couriers	1		470,263.00		0.94%
Airlines	1		457,299.00		1.12%
Diversified Financial Services	1		140,908.00		0.71%
Diversified Telecommunications Services	1		3,200,596.00		7.26%
Electric Utilities	1		809,360.00		3.98%
Food and Staples Retailing	1		191,287.00		0.93%
Health Care Providers and Services	1		45,921.00		0.33%
Hotels Restaurants and Leisure	1		162,786.00		0.64%
Household Products	1		79,120.00		0.47%
Industrial Conglomerates	1		1,109,114.00		15.08%
Machinery	1		134,814.00		0.42%
Metals and Mining	1		548,348.00		1.29%
Multi-Utilities	1		537,350.00		2.01%
Semiconductors and Semiconductor Equipment	1		579,027.00		2.32%
Software	1		274,023.00		8.64%
Textiles and Apparel	1		60,538.00		0.61%
Capital Markets	2		850,447.00		9.84%
Commercial Banks	2		1,017,551.00		4.10%

Risikoattribution nach Asset Allocation und Asset Selection

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(R_{active}) &= \sigma^2\left(R_{port} - R_{bench}\right) \\
&= \sigma^2\left(\omega_{port}^{EQ} R_{port}^{EQ} + \omega_{port}^{FI} R_{port}^{FI} - R_{bench}\right) \\
&= \sigma^2\left(\omega_{port}^{EQ} R_{port}^{EQ} + \omega_{port}^{FI} R_{port}^{FI} - \omega_{bench}^{EQ} R_{bench}^{EQ} + \omega_{bench}^{FI} R_{bench}^{FI}\right) \\
&= \sigma^2\left(\left(\omega_{bench}^{EQ} + \underbrace{\left(\omega_{port}^{EQ} - \omega_{bench}^{EQ}\right)}_{\omega_{active}^{EQ}}\right) R_{port}^{EQ} + \left(\omega_{bench}^{FI} + \underbrace{\left(\omega_{port}^{FI} - \omega_{bench}^{FI}\right)}_{\omega_{active}^{FI}}\right) R_{port}^{FI} - \omega_{bench}^{EQ} R_{bench}^{EQ} + \omega_{bench}^{FI} R_{bench}^{FI}\right) \\
&= \sigma^2\left(\omega_{bench}^{EQ} \underbrace{\left(R_{port}^{EQ} - R_{bench}^{EQ}\right)}_{R_{active}^{EQ}} + \omega_{active}^{EQ} R_{port}^{EQ} + \omega_{bench}^{FI} \underbrace{\left(R_{port}^{FI} - R_{bench}^{FI}\right)}_{R_{active}^{FI}} + \omega_{active}^{FI} R_{port}^{FI}\right) \\
&= \sigma^2\left(\omega_{bench}^{EQ} R_{active}^{EQ} + \omega_{bench}^{FI} R_{active}^{FI} + \omega_{active}^{EQ} R_{port}^{EQ} + \omega_{active}^{FI} R_{port}^{FI}\right) \\
&= \sigma^2\left(\underbrace{\omega_{bench}^{EQ} R_{active}^{EQ} + \omega_{bench}^{FI} R_{active}^{FI}}_{R_{selection}}\right) + \sigma^2\left(\underbrace{\omega_{active}^{EQ} R_{port}^{EQ} + \omega_{active}^{FI} R_{port}^{FI}}_{R_{allocation}}\right) + 2 \cdot \mathrm{COV}\left(R_{selection}, R_{allocation}\right)
\end{aligned}
$$

Risikoattribution nach Asset Allocation und Asset Selection

R^{x}_{port} $\triangleq$ Return of asset class x within portfolio

R^{x}_{bench} $\triangleq$ Return of asset class x within benchmark

R^{x}_{active} $\triangleq$ Active Return of asset class x

ω^{x}_{port} $\triangleq$ Weight of asset class x within portfolio

ω^{x}_{bench} $\triangleq$ Weight of asset class x within benchmark

ω^{x}_{active} $\triangleq$ Active weight of asset class x

Risikoattribution nach Asset Allocation und Asset Selection

$$\omega_{active}^{EQ} = \omega_{active}^{FI} \quad = 0$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(R_{active}) \quad &= \sigma^2\left(\omega_{bench}^{EQ} R_{active}^{EQ} + \omega_{bench}^{FI} R_{active}^{FI}\right) \\
&= \sigma^2\left(\underbrace{\omega_{port}^{EQ} R_{active}^{EQ} + \omega_{port}^{FI} R_{active}^{FI}}_{R_{selection}}\right)
\end{aligned}$$

Risikoattribution nach Asset Allocation und Asset Selection

$$R_{active}^{EQ} = R_{active}^{FI} \quad = 0$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(R_{active}) \quad &= \sigma^2\left(\omega_{active}^{EQ} R_{port}^{EQ} + \omega_{active}^{FI} R_{port}^{FI}\right) \\
&= \sigma^2\left(\underbrace{\omega_{active}^{EQ} R_{bench}^{EQ} + \omega_{active}^{FI} R_{bench}^{FI}}_{R_{allocation}}\right)
\end{aligned}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit